微分流形与黎曼几何
aka 微分流形及应用

Differenial Manifolds and Riemannian Geometry
aka Differential Manifold and its application

张思容
zhangsirong@buaa.edu.cn

数学与系统科学学院，北京航空航天大学
School of Mathematics and Systems Science, Beihang University

March 9, 2012

Chaper 2: Differential Manifolds and maps 微分流形及微分映射

什么是微分?

Question:
什么是导数? 什么是全微分? □

Answer:
全微分是在函数某点附近的线性逼近。
导函数在每一点的值是一个线性映射。 □

Remark (注记:)
1920 Banach 空间的微分分析建立。 *Frechet, Hilderbrandt,...*
Reference: Serge Lang, Real and Functional Analysis(GTM142).

欧式空间的微分

1. R^1上函数：$f(x) \to f'(x)$ 可微=可导
2. R^n上函数：$f(X) \to \nabla f$ 可微=连续可导
   中值定理:
   高阶导数:
3. R^n上向量函数：$F(X) \to DF$ Jacobian 矩阵;
   复合链式法则:
   高阶导数:

欧式空间的切向量空间

- 定义: $T_a(R^n)$为a点的一个n维向量空间$V^n(a)$;
  $V^n(a)$平行移动等价与$V^n(0) = R^n$
- 一般弯曲情形: S^2 不行。
- 局部定义方法(其一): 过a点的曲线等价类，满足在a的切线相同;
  R^n存在简单的向量空间的基 $e_i = \partial/\partial x_i$.

欧式空间的重要定理

- 微分同胚: $F : U \to V$可微, F^{-1}存在可微。
  有不同的可微C^1, C^∞, C^w.
- 反例: $f(x) = x^3$;
- 例子: 线性映射是微分同胚。

Theorem (逆函数定理)

如果$f : U \subset \mathbb{E}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$ 在点p处$Df(p)$是可逆线性映射，则f在p点附近是个局部同胚。从而存在局部的逆函数。

注记: 应用收缩映像定理(Banach空间),构造逆函数;

Remark

微积分的另一个重要定理:常微分方程的局部存在唯一定理。

什么是微分结构?

Definition (n维拓扑流形M上的微分结构)

M是个拓扑空间，$\mathcal{A}\{(U_a, \phi_a) : a \in I\}$是一族坐标卡，
并满足:

1. $\{(U_a, \phi_a) : a \in I\}$ 是M的一个开覆盖;
2. 属于$\mathcal{A}$的任两个坐标卡是C^r相关的;
3. $\mathcal{A}$是C^r极大的。

称$\mathcal{A}$为M上一个C^r微分结构。
称$(M, \mathcal{A})$为一个n维C^r微分流形。

Remark (不同类别)

C^0 拓扑流形
C^∞ 光滑流形: 注: C^r流形可以相容与一个C^∞结构。
C^ω 实解析流形 $\mathbb{C}^\omega$ 复解析流形 $n = 2m$

光滑Atlas 地图册

Definition (C^r相关(相容))

如果M上的任两个相交坐标卡$(U, \phi), (V, \psi) : U \cap V \neq \emptyset$,满足
$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$是$C^r$映射(同胚)。 称$\psi \circ \phi^{-1}$为坐标卡的过渡映射(*transition map*)。 称$(U, \phi), (V, \psi)$是C^r相关。

Definition (光滑Atlas)

如果M上的坐标卡集合$\mathcal{A}$覆盖M, 并且 其中任两个相交坐标卡$(U, \phi), (V, \psi)$,满足 $\psi \circ \phi^{-1}$是光滑微分同胚。
称$\mathcal{A}$为M上的一个光滑*Atlas*。 属于光滑*Atlas*的坐标卡称为容许光滑坐标卡。

Remark

1. 所有坐标卡的集合构成C^0地图册。
2. *Atlas*不是唯一的; $\mathcal{A}_1 = \{(R^n, Id)\}, \mathcal{A}_2 = \{(B_1(x), Id_{B_1(x)})\}$

极大地图册和坐标表示

Definition (极大地图册)

称M上地图册$\mathcal{A}$是极大的，如果任一坐标卡与$\mathcal{A}$中的每一个坐标卡都是光滑相容的， 它必然属于$\mathcal{A}$。

Proposition

1. M上任一地图册包含于一个极大地图册。
2. 有一个全局坐标卡的拓扑流形是一个光滑流形。

Remark (坐标表示)

1. 任一坐标卡(U,ϕ)给出U上一个曲纹坐标。任一点$p\in U$的坐标表示$\phi(p)=(x^1,x^2,\ldots,x^n)|_p$.
2. 例子：极坐标$\phi(p)=(\rho,\theta)$定义在$U=(x,y):x>0$上。

常见例子

EXAMPLE (全局坐标卡)

函数的图像;R^1的两个光滑结构：$(R^1,Id),(R^1,\phi):\phi(x)=x^3$;

EXAMPLE (n维球面)

S^2应用图像或球极投影的地图册决定同一个光滑结构。

EXAMPLE (n维向量赋范空间)

记$\mathbb{V}^n$的基为$E_i:i=1,..n.R^n$的基为$e_i:i=1,..n.$
存在全局坐标卡$\phi:\mathbb{V}\to R^n:\phi(X)=\phi(x^iE_i)=x^ie_i$.注意它与基的选取无关，称为标准光滑结构。

EXAMPLE (矩阵)

$m\times n$矩阵是mn维光滑流形。$n\times n$可逆矩阵$GL(n,\mathbb{R})$是n^2维光滑流形。***$Grassman$流形：n维向量空间的k维子空间集合$G(n,k)$是$n(n-k)$维光滑流形。

构造新光滑流形

Proposition

- 光滑M的每个开子集是n维光滑流形。
- 乘积光滑流形$M_n\times N_p$ 是 $n+p$维光滑流形。
- ***商流形： 用R^n中开子集$(pull\text{-}back)$定义集合M的拓扑结构和微分结构。

Remark (Einstein和式约定:)

记$\sum_{i=1}^{i=n}x^ie_i=x^ie_i$,$i$是隐含指标$(dummy\ index)$。

实射影空间

EXAMPLE (RP^n)

设x是R^{n+1}中任一非零点， 记$[x]$为过$x,0$的直线(一维子空间).
RP^n的拓扑由映射$\pi:R^{n+1}\to RP^n,\pi(x)=[x]$决定。
坐标卡U_i,ϕ_i为$U_i=\pi(W_i):W_i=\{x^i\neq 0\}$,

$$\phi_i[x^1,x^2,...,x^{n+1}]=(\frac{x^1}{x_i},\ldots,\frac{x^{i-1}}{x_i},\frac{x^{i+1}}{x_i},\ldots,\frac{x^{n+1}}{x_i})$$

$$\phi_i^{-1}(u^1,u^2,\ldots,u^n)=[u^1,\ldots,u^{i-1},1,u^i,\ldots,u^n)$$

设$i>j$,

$$\phi_j\circ\phi_i^{-1}(u^1,u^2,...,u^n)=(\frac{u^1}{u_j},\ldots,\frac{u^{j-1}}{u_j},\frac{u^{j+1}}{u_j},\frac{u^{i-1}}{u_j},\frac{1}{u_j},\frac{u^i}{u_j},\ldots,\frac{u^n}{u_j})$$

光滑映射

Definition (光滑映射)

F为从光滑流形M到N的映射，f称为光滑的，如果任一$p \in M$,存在光滑坐标卡(U, ϕ)包含p,存在光滑坐标卡(V, ψ)包含$F(p)$,
并且$F(U) \subset V$, 复合映射$\psi \circ F \circ \phi^{-1}$是光滑映射$(\phi(U) \to \psi(V))$.
记$\hat{F} = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$为$F$的坐标表示。

Proposition

- F是光滑的与坐标卡的选取无关；
- 每个光滑映射是连续映射；
- 光滑映射的复合是光滑的；

Remark

微分同胚*(Diffeomorphism)*:存在光滑逆映射的光滑映射$F: M \to N$,是M到N的一个光滑同胚。

常见例子

EXAMPLE (光滑函数，光滑曲线)

$f: M \to R$;记为$C^\infty(M)$, 是个无穷维向量空间*(流形？)*
$f: I \to M$;光滑曲线*(流)*

EXAMPLE (嵌入与覆盖映射)

子空间嵌入: $\imath: S^n \to R^{n+1}$
乘积流形投射：$\pi_1: M \times N \to M$
商映射：$\pi: R^{n+1}/0 \to RP^n$

EXAMPLE (微分同胚)

R^1 微分结构等价：$(R^1, Id) \to (R^1, \phi)$: $f: t \to t^{1/3}$
开球与R^n同胚。$f(x) = x/(1 - |x|^2)$

微分拓扑的结果

微分结构 $\to$ 微分拓扑

Theorem (单位分解)

(A_2)光滑流形上存在一序列(可数)光滑f_i，满足 $0 \le f_i \le 1$,$suppf_i$紧致，$\sum f_i = 1$.

1. 光滑微分结构唯一(Munkers, Moise)：$n \le 3$ 微分同胚意义下唯一.
2. 欧几里德空间唯一：$n \ne 4$
   $n = 4$,无穷多。(1984) Donaldson, Freedman.
3. 紧致流形:存在拓扑流形无微分结构。$n > 3$;
   Milnor 怪球 S^7上有28个微分结构。

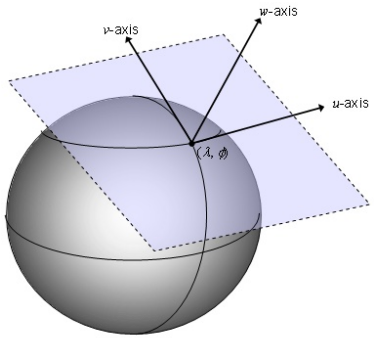
怎样计算光滑映射微分?

Question:

什么是导数？什么是全微分？ □

Answer:

全微分是在函数某点附近的线性逼近。
导函数在每一点的值是一个线性映射。 □



Remark

定义流形每一点处的线性空间?
定义对应映射在每一点的线性逼近?
说明定义与坐标卡选取无关!

欧几里德空间的切向量

Definition (几何切向量空间)

任一点$p \in R^n$,记$\mathbb{R}^n_p = (p, v) : v \in R^n$.
称v为在p点的切向量。

Remark

切向量构造方向导数:
$D_v|_p f = D_v f(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(p + tv)$
$D_v|_p$是$C^\infty(R^n) \to \mathbb{R}$的一个线性映射。且满足乘积法则。

欧几里德空间的导子空间

Definition (光滑函数的导子)

一个线性映射$X : C^\infty(R^n) \to \mathbb{R}$称为在$p$点的导子*(derivation)*。 如果满足$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf$.

Remark

记导子组成空间是线性空间，记为$T_p(R^n)$，称为p点的切空间。

Lemma (导子的性质)

1. f是常值函数,$Xf = 0$
2. $f(p) = g(p) = 0, X(fg) = 0$

切空间即几何向量空间

Theorem (切空间同构)

如果R^n上任一点p,映射:$v_p \to D_v|_p$是一个从R^n_p到$T_p(R^n)$的同构。

Proof.

1. 映射是线性的;
2. 映射是单的;
3. 映射是满的;
   Taylor展开$f(x) = f(p) + \sum \frac{\partial f}{\partial x^i}(x^i - p^i) + \sum g_i(x)(x^i - p^i)$

$\square$

Corollary

$\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$组成$T_p(R^n)$的一组基。

流形的切空间

Definition (光滑流形上的切空间)

一个线性映射$X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$称为在$p$点的导子*(derivation)*。 如果满足$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf$.
所以在p点导子组成的线性空间成为在p点的切空间$T_p(M)$.

Lemma (导子的性质)

1. f是常值函数,$Xf = 0$
2. $f(p) = g(p) = 0, X(fg) = 0$
3. 若在p点的某邻域上$f = g$，有$Xf = Xg$.

流形的切映射

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "d\varphi"] \arrow[d, "\pi_M"'] & TN \arrow[d, "\pi_N"] \\ M \arrow[r, "\varphi"'] & N \end{tikzcd}$$

Definition (push-forward 切映射)

给定光滑映射$F: M \to N$，在任一p定义$F_*: T_pM \to T_{F(p)}N$, $F_*(X)(f) = X(f \circ F)$

Proposition (切映射性质)

1. F_*是线性的；
2. 复合链式法则$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$
3. 若F是微分同胚， F_*是线性同构。
4. 特别开子集嵌入$i: U \to M$诱导$i_*: T_p(U) \to T_p(M)$同构。

坐标卡的表示和计算

Corollary

(ϕ, U)为M在p点的一个坐标卡,则 $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$组成$T_p(M)$的一组基。
其中$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = (\phi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\phi(p)}$称为坐标卡向量。
记$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$,$X^i$是坐标分量;

Remark

给定光滑映射$F: M \to N$，坐标表示$\hat{F} = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$;
有$F_*(\frac{\partial}{\partial x^i})|_p = \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j}|_{F(p)}$.
称F_*为$DF(p), df(p), F'(p)$,即全微分!

Proposition (坐标卡变换)

设$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}|_p$为两个坐标卡的基； 基变换$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}|_p$
坐标变换 $\tilde{X}^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) X^i$

光滑曲线的切向量

Definition

记光滑曲线$r: I \to M$，曲线在t_0点的切向量为
$r'(t_0) = r_* \left(\frac{d}{dt}|_{t_0}\right) \in T_{r(t_0)}M$.
也记为$\frac{dr}{dt}(t_0)$.

Remark

特别$r'(t_0)f = \frac{d(f \circ r)}{dt}(t_0)$ 即欧氏曲线的导数!
坐标表示 $r'(t_0) = (r^i)'(t_0) \frac{\partial}{\partial x^i}|_{r(t_0)}$

Proposition

- 每个切向量$X \in T_p(M)$，存在曲线在该点的切向量为X
  $\to$ 曲线等价类=切空间?
- 复合曲线的链式法则 $(F \circ r)'(t_0) = F_*(r'(t_0))$

切空间的等价定义***

- 光滑函数的germ芽： $f \sim g, f = g|_U$ 记为C_p^∞
  $T_p(M)$即C_p^∞上的导子空间。
- 光滑曲线等价类：在一点的切向量相同的曲线；
- 满足坐标变换规律的向量 $\to$ 张量。

余切空间

Definition (余切空间)

在点p的余切空间为$T_p(M)$的对偶空间，记为$T_p^*(M)$.
记为ω,基为dx^i。

Definition (余切映射pushback)

给定光滑映射$F : M \to N$，在任一p定义$F^* : T_{F(p)}^* N \to T_p^* M$,
$F^*(\omega)(X) = \omega(F_* X)$。

Remark

光滑函数的微分df取值是余切向量!
$f(p+v) - f(p) \approx \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)v^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)dx^i|_p(v) = df_p(v)$

光滑映射的秩

Definition (映射的秩)

给定光滑映射$F : M \to N$，在任一p切映射为$F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$, 定义F的秩为线性映射F_*的秩。记为$rank(F)$。
特别如果$rank(F) = k$对每一点都成立，称F是秩为k的常秩映射。

Definition (常秩映射的分类)

给定光滑映射$F : M \to N$是常秩的，如果$rank(F) = dimN$,称F是淹没映射; 如果$rank(F) = dimM$,称F是浸入映射;
特别如果对有子集拓扑的像$F(M) \subset N$，F是浸入，且$F : M \to F(M)$是拓扑同胚，称F是光滑嵌入映射。

Remark

F是淹没映射即F_*是满射;
F是浸入映射;即F_*是单射；存在拓扑嵌入不是光滑嵌入映射。

例子

EXAMPLE

投射是淹没映射：$\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$
映入(包含)是浸入映射: $i : M_1 \to M_1 \times M_2$

EXAMPLE (环面)

定义:$T : R^2 \to R^3$为$T(\phi, \theta) = ((2 + \cos\phi)\cos\theta, (2 + \cos\phi)\sin\theta, \sin\phi)$
T是浸入，诱导环面的嵌入。

EXAMPLE (光滑曲线)

定义八字形(*figure 8*): $r : (-\pi/2, 3\pi/2) \to R^2$为$r(t) = (\sin 2t, \cos t)$. 它是浸入($r'(t) \neq 0$)不是嵌入。
定义环面曲线：$r_c : R \to S^1 \times S^1$为$r_c(t) = (e^{i2\pi t}, e^{i2\pi ct})$. 是浸入，$c$为无理数不是嵌入!

映射的秩定理

Theorem (逆函数定理)

给定光滑映射$F : M \to N$，在任一p切映射F_*为双射，则存在邻域$p \in U, F(p) \in V$,使得$F|U : U \to V$是微分同胚。称为局部微分同胚。
特别$dimM = dimN$,F是淹没或浸入，都是局部微分同胚。

Theorem (秩定理)

给定光滑映射$F : M \to N$是常秩的，如果$rank(F) = k$,则任一点p处存在光滑坐标卡$(\phi U), (\psi, V)$使得F的坐标表示$\hat{F}(x^1, x^2, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0)$.
即常秩映射局部可以看成线性映射。

Theorem (常秩映射分类)

给定光滑映射$F : M \to N$是常秩的，如果F是满射，F是淹没；如果F是单射，F是浸入；如果F是双射，F是微分同胚。

Definition (嵌入子流形)

子集$S \subset M$满足：任一点$p \in S$,存在M上光滑坐标卡ϕ, U, 有
$\phi(U \cap S) = (x^1, x^2, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$.
S称为嵌入k维子流形，$codim(S) = n - k$.

Definition (浸入子流形)

子集$S \subset M$满足：S是k维流形，且$i : S \to M$是光滑浸入映射。
S称为浸入k维子流形，$codim(S) = n - k$.

Remark

每个嵌入子流形是浸入子流形。
浸入子流形的拓扑比作为子集的拓扑细。

嵌入子流形的例子

EXAMPLE (函数的图)

$\Gamma(F) = \{(x, y) \in R^n \times R^k : x \in U, y = F(x)\}$是嵌入子流形。
特别局部是函数图的集合是嵌入子流形，如S^n.

EXAMPLE (矩阵子群)

$SL(n) = \{detA = 1\}$是$det^{-1}(1)$,闭的嵌入子流形。$n^2 - 1$维
$O(n) = \{AA^\tau = 1\}$是$f^{-1}(Id)$,闭的嵌入子流形。$(n-1)n/2$维。

Remark

带边流形的边界是$n-1$维闭的嵌入子流形。

子流形的判别法则

Theorem (嵌入,浸入子流形)

嵌入子流形 ≡ 嵌入映射的像。
浸入子流形 ≡ 浸入映射的像。

Definition (水平集)

给定光滑映射$F : M \to N$, $F^{-1}(p)$称为水平集；
若$F_*(p)$是满射，称p为F的正则点，否则为临界点。
若$F^{-1}(q)$都是正则点，称q为正则值，对应的原像为正则水平集；否则为临界值。

Theorem (映射的水平集)

给定光滑映射$F : M \to N$是常秩的，如果$rank(F) = k$,任一水平集是一个闭的嵌入子流形$(codim = k)$.
特别F是淹没映射，任一水平集是闭的$codimN$维嵌入子流形。
另外，任一正则水平集是闭的$codimN$维嵌入子流形。

子流形的微分拓扑结果

- Sard Theorem: 任一个临界值的原像的测度为零。
- Whitney 浸入定理: 任一n维光滑流形可以看作R^{2n}的浸入子流形。(可改进为$2n-1$)
- Whitney 嵌入定理：任一n维光滑流形可以看作R^{2n+1}的嵌入子流形。(可改进为$2n$)
- Whitney 逼近定理:任一光滑流形上的连续函数可有一个光滑函数来逼近。
- 管状邻域定理：R^n的每个嵌入子流形存在管状邻域。
- Whitney 逼近定理:任两光滑流形间的连续映射可有一个光滑映射来同伦逼近。

注记： Morse理论参见教材；

定义

Definition (正则与临界点)

如果$f: M \to N$是可微映射，记$dimM = m, dimN = n$, 如果在一点$p \in M$有$rank_p(f) = n$,称p为f的正则点，如果$rank_p(f) < n$,称为f的临界点.
记临界点为$C(f)$,正则点为$M/C(f)$;

Definition (正则与临界值)

同上定义，如果给定点$q \in N$有$f^{-1}(q) \cap C(f) = \emptyset$,称$q$为$f$的正则值；否则称为临界值。

- 临界值集合即$f(C(f))$,正则值集合$N/f(C(f))$;
  特别：$N/f(M)$是正则值；
- 正则等价定义：$df_p : T_pM \to T_qN$是满射；
- $m < n$,都是临界点，$m > n$,正则即淹没，$m = n$，正则即局部同胚；

正则值原像定理 preimage theorem

Theorem (正则值原像定理)

给定$f: M \to N$是可微映射，$q \in N$是正则值，且$f^{-1}(q)$非空；则$S = f^{-1}(q)$是M的正则子流形，$dimS = dimM - dimN$.特别它是闭子流形。

Proof: 证明存在局部坐标卡使得$\phi(U \cap f^{-1}(q)) = \phi(U) \cap (R^{m-n} \times 0)$.

Corollary (唱片引理)

给定$f: M \to N$，如果$m = n$且M紧致，任一$q \in N$是正则值，且$f^{-1}(q)$非空；，则有 $f^{-1}(q)$是有限子集$p_1, \ldots, p_k$,存在开邻域$q \in V$,使得$f^{-1}(V) = U_1 \cup \cdots \cup U_k$, 其中$U_i$两两不相交，$f|U_i \to V$是微分同胚。

Lemma (映射原像)

$f: X \to y$, $A \subset X, B \subset Y$,则 $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

例子

EXAMPLE ($S^n, O(n)$)

单位球面是$f^{-1}(1) \subset R^{n+1}$，其中$f: R^{n+1} \to R, f(x) = ||x||$.
正交矩阵(群): $f: M(n,R) \to Sym(n,R), f(A) = AA^\tau$.
$O(n) = f^{-1}(I)$是紧致子流形；

EXAMPLE (水平集level set)

$g: M \to R$, 称$g^{-1}(c)$为M的水平集。c为正则值，称为正则水平集(必为子流形),
特别$g^{-1}(0)$是函数f的零点集合。
例如：二次曲面$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$;
经典代数几何即研究多项式函数集的零点集合的交；

横截性定义

定义映射$f: M \to N$,Z是N的子流形,

EXAMPLE ($f^{-1}(Z)$是正则子流形)

设Z由k个独立函数g_i切成，$g = (g_1, \ldots, g_k)$, 则$f^{-1}(Z) = g \circ f(0)$.如果0是$g \circ f$的正则值，则$f^{-1}(Z)$是子流形。
$d(g \circ f)$是满射，当且仅当$Im(df_p) + T_q(Z) = T_q(N)$.

Definition (横截)

给定$f: M \to N$,S为N的子流形， 如果$p \in f^{-1}(S)$,且$df_p(T_pM) + T_qS = T_qN$,称f在p点与S横截；记为$f \pitchfork_p S$.
如果$A \subset M$中任一点与S横截，记为$f \pitchfork_A S$. 特别$A = M$,记为$f \pitchfork S$.

例子

EXAMPLE (子流形横截)

$i : Z \to N$, S是子流形，称S与Z横截， $Z \pitchfork S$.
特别$Z \cap S$是正则子流形，$codim(S \cap Z) = codimS + codimZ$.

- $f : M \to N$是淹没，则$f \pitchfork S$.
- $S = \{q\}$是单点，横截即正则。
- $dimM + dimS < dimN$,则$f \pitchfork S$即$f(M) \cap S = \emptyset$.

EXAMPLE (实例)

S即x轴，$f : R^1 \to R^2, f(t) = (0, t)$，$g(t) = (t, t^2)$。
更多R^3, R^2中例子。

横截原像定理 preimage theorem

Proposition (横截判定)

设$f : M \to N$,S为N的子流形,$dimM = m, dimN = n, dimS = s$,设$p \in f^{-1}(S)$, 如果$(Q, \phi)$为$S$在$N$中的正则坐标卡，$\phi(Q \cap S) = \phi(Q) \cap (R^s \times 0)$,则$f \pitchfork_p S$充要条件是复合映射 $\pi_2 \circ \phi \circ f$是淹没。

Proposition (横截典范形式)

同上如果$f \pitchfork_p S$，则存在M上坐标卡，使得$\tilde{f}(u, v) = (\eta(u, v), v)$.

Theorem (横截原像定理)

给定$f : M \to N$是可微映射，S为N的子流形，如果$f \pitchfork S$且$f^{-1}(S)$非空，则 $f^{-1}(S)$是M的正则子流形，$codim(f^{-1}(S)) = codimS$.特别它是闭子流形。